2015 11 9

المحاضرة السابعة

خواص الدوال المثلثية:

إن معظم الخواص للدوال المثلثية في الساحة الحقيقية تكون متحققة في الساحة العقدية منها

-1

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

كذلك

$$\sin(-z) = -\sin z$$

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz}-e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}$$

$$= -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

- $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-iz} - e^{-i\frac{\pi}{2}+iz}}{2i}$$

لكن

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \frac{ie^{-iz}+ie^{+iz}}{2i} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos z$$

- $\cos(\pi - z) = -\cos z$

$\sin(\pi - z) = \sin z$

$$\cos(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi - z)} + e^{-i(\pi - z)}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\pi - iz} + e^{-i\pi + iz}}{2} = \frac{-e^{-iz} - e^{iz}}{2} = -\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= -\cos z$$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

- $\cos(2\pi + z) = \cos z$

$\sin(2\pi + z) = \sin z$

$$\sin(2\pi + z) = \frac{e^{i(2\pi + z)} - e^{-i(2\pi + z)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i2\pi + iz} - e^{-i2\pi - iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

تمرين

$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$e^{-i2\pi} = 1$

$\tan(\pi + z) = \tan z$

- $$\tan(\pi + z) = \frac{\sin(\pi + z)}{\cos(\pi + z)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$$

من خلال ما سبق نبين بأن قيم الدوال في الساحة الحقيقية تكون محدودة
في الساحة العقدية فانها خارجة عن هذه الحدود وغير محدودة ودالة الجيب و
التجيب

- نعلم بأن

$$\sin z = \sin x \, ch\, y + i \cos x \, sh\, y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \, ch^2 y + \cos^2 x \, sh^2 y$$

لكن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \, ch^2 y + (1 - \sin^2 x) \, sh^2 y$$

$$= \sin^2 x \, ch^2 y + sh^2 y - \sin^2 x \, sh^2 y$$

$$= \sin^2 x \, (ch^2 y - sh^2 y) + \sin^2 y$$

$$= \sin^2 x + sh^2 y$$

من هذه العلاقة نستنتج بأن مقياس الجيب المثلثي غير محدود في الساحة العقدية

- كما نعلم بأن

$$\cos z = \cos x \, ch\, y - i \sin x \, sh\, y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y$$

ولكن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \, ch^2 y + (1 - \cos^2 x) \, sh^2 y$$

$$= \cos^2 x \, (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y$$

$$= \cos^2 x + sh^2 y$$

من هذه العلاقة نستنتج بأن دالة التجيب المثلثي في الساحة العقدية غير محدودة

- لنوجد الآن جذور المعادلة $\sin z = 0$

$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

بما أن $\sin z = 0 \Leftarrow |\sin z|^2 = 0$

أي أن $\sin^2 x + sh^2 y = 0$

ومنه نستنتج أن

$$\sin^2 x = 0 \ \wedge \ sh^2 y = 0$$

$$\sin x = 0 \ \wedge \ sh\, y = 0$$

$sh\,y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=0 \Rightarrow e^{y}-e^{-y}=0 \Rightarrow e^{y}=e^{-y} \Rightarrow y=-y \Rightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0$

$x=n\pi \qquad y=0$

$z=n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2 \ldots$

• لنوجد الآن حلول المعادلة $\cos z=0$

$\cos z=0 \Leftarrow |\cos z|^2=0$

$\Leftarrow \cos^2 x+sh^2 y=0$

ومنه فإن $\cos^2 x=0 \wedge sh^2 y=0$

$\cos x=0 \wedge sh\,y=0$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad y=0$

$z=x+iy=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad ; n=0,\mp1,\mp2 \ldots$

مثال توضيحي

أوجد حلول المعادلة:

$\sin z=3$

الحل: نعلم بأن $\sin(x+iy)=\sin x\, ch\,y+i\cos x\, sh\,y$

أي أن

$\sin x\, ch\,y+i\cos x\, sh\,y=3$

ومنه
(1) $\sin x\, ch\,y=3$

(2) $\cos x\, sh\,y=0$

من (2) بأخذها $sh\,y=0 \Leftarrow y=0$ نعوض عن y في (1) فنجد

$\sin x\, ch\,0=3$

$\sin x=3$ مستحيلة

لأن $|\sin x|\leq 1$

أو $\cos x = 0 \Leftarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2 ..$

نعوض في (١) فنجد أن

$$\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)\, ch y = 3$$

$\pm ch y = 3 \Leftarrow ch y = 3$ أو $ch y = -3$

والمعادلة $ch y = -3$ مستحيلة لأن $ch y \geq 1 \quad \forall y \in R$

ومنه فإن $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$$ch y = 3 \Rightarrow \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = 3$$

أي أن

$$e^{y} + e^{-y} = 6 \Rightarrow$$

$$e^{2y} - 6e^{y} + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 = 32$$

دوماً نأخذ عدد موجب

$$e^{y} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \quad > 0$$

$$e^{y} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \quad > 0 \qquad \text{مقبول}$$

ومنه فإن

$$y = \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$$

أي أن حلول المعادلة المعطاة هي

$$z = x + iy = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) + i\log(3 \mp 2\sqrt{2})$$

الدوال الزائدية (القطعية):

نعلم بأن $ch x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad sh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

لذلك نعرف دالة الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة العقدية بالشكل الآتي

$$sh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad ch z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

إن كل من الدالتين شاملة أي تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي لأن كل منها تركيب خطي لكل من الدالتين الشاملتين e^{z}, e^{-z} وبعدها

وبما أنها دالة تشاملة فهي دالة قابلة الاشتقاق

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sh} z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{ch} z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$$

وتعرف دالة الظل الزائدي وظل التمام الزائدي من خلال التالي

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\operatorname{ch} z = 0 \qquad \operatorname{sh} z = 0$$

ونلاحظ بأن دالة الظل الزائدي هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوى العقدي

باستثناء جذور المعادلة (النقاط التي تعدم المقام).

كما أن دالة الظل الزائدي هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوى العقدي

باستثناء جذور المعادلة $\operatorname{sh} z = 0$

بفرض أن $z = x + iy$ عندئذ:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{x}}{2}[\cos y + i\sin y] - \frac{e^{-x}}{2}[\cos y - i\sin y]$$

$$= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cos y + i\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\sin y$$

$$= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{sh} x \cos y$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} x \sin y$$

بنفس الأسلوب نجد أن:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

أي أن

$$\operatorname{Re} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{ch} x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sh} x \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sh} x \sin y$$

* نلاحظ بأن هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك تحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y = \operatorname{ch} z$$

إن جميع الخصائص التي تحققها دالة الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة العقدية تحققها أيضاً دالة الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة الحقيقية وعلاوة على ذلك

$$\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z$$

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2}$$

لأن

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) = 1$$

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$$

$$\operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sh}(z + \pi i) = -\operatorname{sh} z$$

$$ch(z+\pi i) = \frac{e^{z+\pi i} + e^{-z-\pi i}}{2}$$

لكن

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$$

$$ch(z+\pi i) = \frac{-e^{z} - e^{-z}}{2} = -\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = -ch z$$

$$ch(iz) = \cos z$$

$$sh(iz) = i\sin z$$

$$ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$sh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i\sin z$$

$ch^2x - sh^2x = 1$

- $$|sh z|^2 = sh^2x\cos^2y + ch^2x\sin^2y$$
$$= sh^2x\cos^2y + (1 + sh^2x)\sin^2y$$
$$= sh^2x\cos^2y + sh^2x\sin^2y + \sin^2y$$
$$= sh^2x + \sin^2y$$

- $$|ch z|^2 = ch^2x\cos^2y + sh^2x\sin^2y$$
$$= (1 + sh^2x)\cos^2y + sh^2x\sin^2y$$
$$= \cos^2y + sh^2x$$

نوجد الآن جذور المعادلتين $sh z = 0$, $ch z = 0$

$$sh z = 0 \Rightarrow |sh z|^2 = 0$$

$$sh^2x + \sin^2y = 0$$

ومنه:

$$sh^2x = 0 \wedge \sin^2y = 0$$

$$sh x = 0 \wedge \sin y = 0$$

$x = 0 \qquad y = n\pi$

ومنه فإن حلول المعادلة $\operatorname{sh} z = 0$ هي $z = x + iy$

$$z = n\pi i$$

كذلك الأمر $\operatorname{ch} z = 0 \Rightarrow |\operatorname{ch} z|^2 = 0$

$$\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x = 0$$

ومنه فإن $\cos^2 y = 0 \wedge \operatorname{sh}^2 x = 0$

$$\cos y = 0 \qquad \operatorname{sh} x = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad x = 0$$

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) i$$

مثال:

أوجد حلول المعادلة $\operatorname{sh} z = 3i$

الحل: نعلم أنه

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

واعتماداً على تساوي عددين عقديين نجد أنه

(1) $\operatorname{sh} x \cos y = 0$

(2) $\operatorname{ch} x \sin y = 3$

من (1) إما $\operatorname{sh} x = 0 \Leftarrow x = 0$ نعوض في (2) فنجد أنه:

مستحيلة $\operatorname{ch} 0 \sin y = 3 \Rightarrow \sin y = 3$

أو $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$

نعوض في (2) نجد أنه

$$\operatorname{ch} x (\pm 1) = 3$$

أي أنه $\operatorname{ch} x = 3$, $\operatorname{ch} x = -3$ مستحيلة لأنه $\operatorname{ch} x \geq 1$

ومنه فإنه $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

وبالتالي $\operatorname{ch} x = 3$

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=3 \Rightarrow e^{x}+e^{-x}=3$$

$$e^{2x}-6e^{x}+1=0$$

$$\Delta=32 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}$$

$$e^{x}=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2}$$

$$e^{x}=\frac{6-4\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2}$$

أي أن $x=\text{Log}(3\pm 2\sqrt{2})$

الدالة اللوغاريتمية: $w=\log z$

إذا رمزنا بـ Log للوغاريتم الطبيعي فعندئذ نعرف الدالة اللوغاريتمية بالعلاقة

$$(1)\quad \log z=\text{Log}|z|+i\varphi$$

حيث φ مطمون العدد العقدي z وبما أن $\varphi=\arg z=\text{Arg}\,z+2n\pi$ نستنتج أن

$$(2)\quad \log z=\text{Log}|z|+i(\theta+2n\pi) \qquad n=0,\mp1,\mp2\ldots$$

حيث $\theta=\text{Arg}\,z$

من العلاقة (2) نستنتج أن الدالة $w=\log z$ هي دالة متعددة القيم ويقابل كل قيمة للمتغير المستقل z هناك عدد غير منته من القيم للمتغير العقدي w

مثال:

إذا كان $w=\log z$

$$\log(1+i)$$

$$w=\text{Log}|1+i|+i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$$

$$=\text{Log}\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right) \qquad n=0,\mp1,\ldots$$

ومن العلاقة الأخيرة نستنتج بأن هناك عدد غير منته من القيم للمتغير العقدي w

إذا عوضنا بالعلاقة (٤) كل n بـ صفر فنحصل على مايعرف بالقيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية بالرمز $\log$ أي أنه:

$$\text{Log } z = \text{Log}|z| + i \text{ Arg } z$$

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

وعندما يؤول المتغير العقدي المستقل z إلى العدد الحقيقي الموجب فإن الدالة اللوغاريتمية تؤول إلى الدالة اللوغاريتمية في الساحة الحقيقية

لنعتبر الدالة

$$\log z = \text{Log}|z| + i\theta$$

حيث $-\pi < \text{Arg } z = \theta \leq \pi$

نرى بأن هذه الدالة هي دالة وحيدة القيمة أي مقابل كل قيمة للمتغير z المناظرة قيمة واحدة وواحدة فقط للمتغير التابع $w = \text{Log } z$

أي أن كل نقطة w هي صورة لنقطة واحدة وواحدة فقط من المستوي العقدي z

z الدالة الأسية $w = e^z$

وعندما $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$ تكون كل نقطة w